



## Modele geometrii obrazów

Modele ścisłe: równanie kolinearności, DLT

Od rzutu środkowego do  
środkowo-równoległego

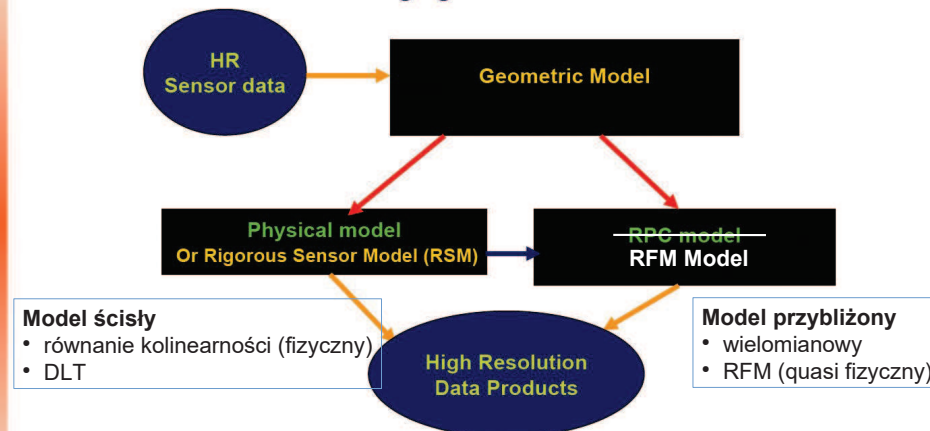
Model RFM



## Modele geometrii



### Imaging Sensor Model



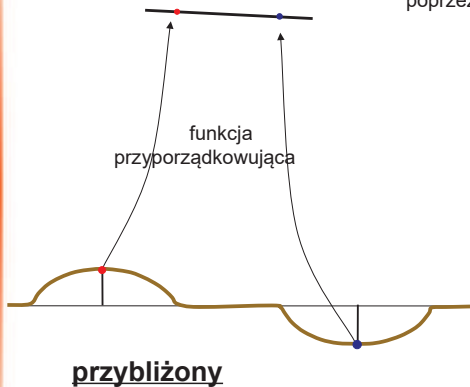
ISPRS Technical Commission IV Symposium "Geospatial Databases for Sustainable Development", Goa, India, 27-30 September 2006



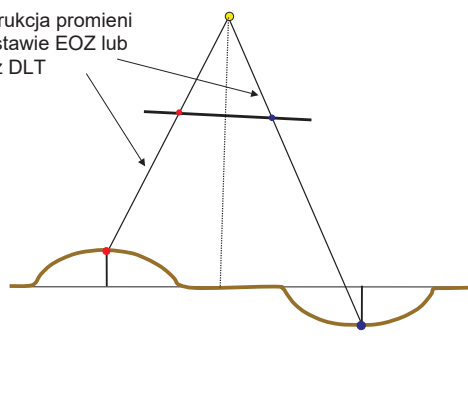
## Modele geometrii

ściśle / fizyczny

rekonstrukcja promieni  
na podstawie EOZ lub  
poprzez DLT

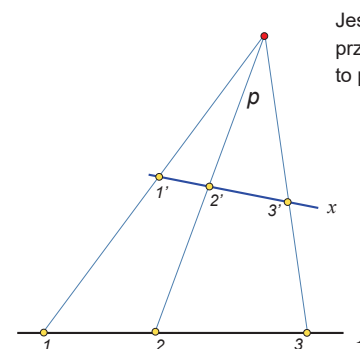


przybliżony



## Homografia → model DLT

Na przykładzie przekształcenia rzutowego prostej na prostą (1D)



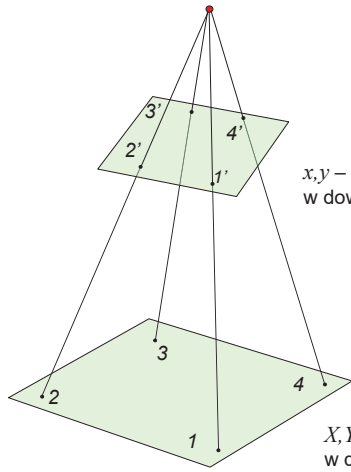
Jeśli pęk prostych ( $p$ )  
przetniemy dwiema prostymi ( $x, X$ )  
to pomiędzy punktami tych prostych zachodzi:

$$x = \frac{AX + B}{CX + 1} \quad \text{funkcja homograficzna, homografia}$$

Do określenia przekształcenia są potrzebne  
3 pkt-y homologiczne



przekształcenie rzutowe 2D na 2D



$$x = \frac{AX + BY + C}{DX + EY + 1}$$

$$y = \frac{FX + GY + H}{DX + EY + 1}$$

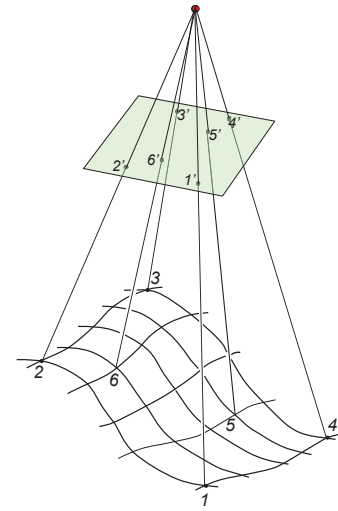
$x, y$  – współrzędne w dowolnym układzie 2D

Do określenia przekształcenia są potrzebne 4 pkt-y homologiczne

$X, Y$  – współrzędne w dowolnym układzie 2D



przekształcenie rzutowe 3D na 2D



$$x = \frac{AX + BY + CZ + D}{EX + FY + GZ + 1}$$

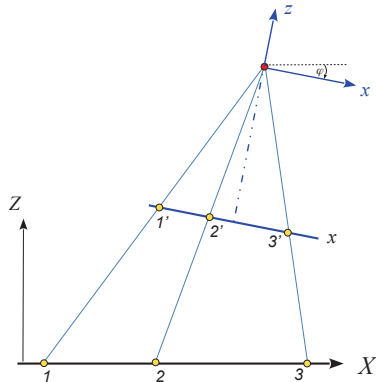
$$y = \frac{HX + IY + JZ + K}{EX + FY + GZ + 1}$$

$$z = \frac{LX + MY + NZ + O}{EX + FY + GZ + 1}$$

potrzeba 6 pkt. homologicznych



Na przykładzie przekształcenia prostej na prostą



$$\begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + \mu \cdot \mathbf{R}_\varphi \begin{bmatrix} x \\ -c \end{bmatrix}$$

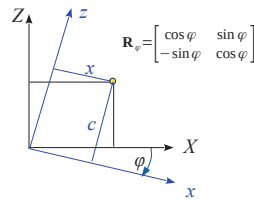
$$\begin{bmatrix} x \\ -c \end{bmatrix} = \frac{1}{\mu} \cdot \mathbf{R}_\varphi^T \begin{bmatrix} X - X_0 \\ Z - Z_0 \end{bmatrix}$$

$$x = -c \cdot \frac{r_{11}(X - X_0) + r_{21}(Z - Z_0)}{r_{12}(X - X_0) + r_{22}(Z - Z_0)}$$

$$x = -c \cdot \frac{r_{11} \frac{(X - X_0)}{U} + r_{21} \frac{(Z - Z_0)}{U}}{r_{12} \frac{(X - X_0)}{U} + r_{22} \frac{(Z - Z_0)}{U}}$$

$$x = \frac{AX + B}{CX + 1}$$

homografia



$$r_{22}(Z - Z_0) = U$$

– przekształcenie rzutowe

wg. równań kolinearności



$$x = \frac{AX + BY + C}{DX + EY + 1}$$

$$y = \frac{FX + GY + H}{DX + EY + 1}$$

związki analityczne

proste | konieczna linearyzacja

niewiadome

$A, B, \dots, H$  (8) | (6)  $X_0, Y_0, Z_0, \varpi, \varphi, \kappa$

do wyznaczenia niewiadomych potrzebne są co najmniej

4 pkt-y

$x, y$

$X, Y$

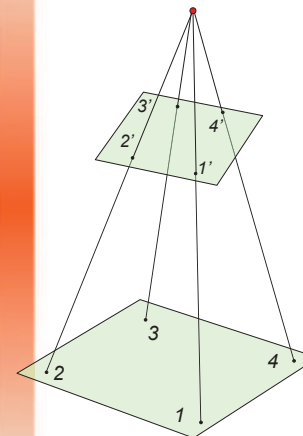
$x, y$  w dowolnym układzie na zdjęciu

3 pkt-y

$x, y$

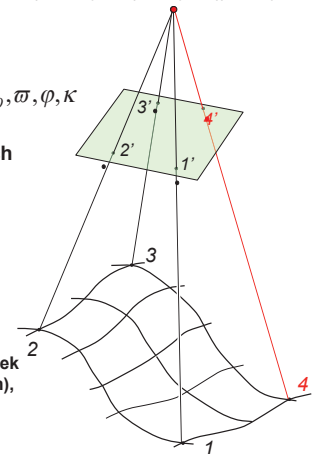
$X, Y, Z$

$x, y$  w układzie tłowym (początek w pkt. głównym), znane  $c$



$$x = -c \frac{a_{11}(X - X_0) + a_{21}(Y - Y_0) + a_{31}(Z - Z_0)}{a_{13}(X - X_0) + a_{23}(Y - Y_0) + a_{33}(Z - Z_0)}$$

$$y = -c \frac{a_{12}(X - X_0) + a_{22}(Y - Y_0) + a_{32}(Z - Z_0)}{a_{13}(X - X_0) + a_{23}(Y - Y_0) + a_{33}(Z - Z_0)}$$





$$x = \frac{AX + BY + CZ + D}{EX + FY + GZ + 1}$$

$$y = \frac{HX + IY + JZ + K}{EX + FY + GZ + 1}$$

**związki analityczne**

proste

konieczna  
linearyzacja

niewiadome

$A, B, \dots, K$  (11)

(6)  $X_0, Y_0, Z_0, \varpi, \varphi, \kappa$

do wyznaczenia niewiadomych  
potrzebne są co najmniej

6 pkt-ów

3 pkt-y

x,y

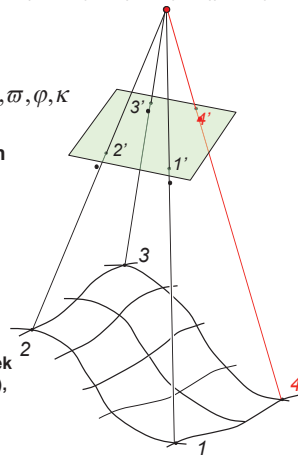
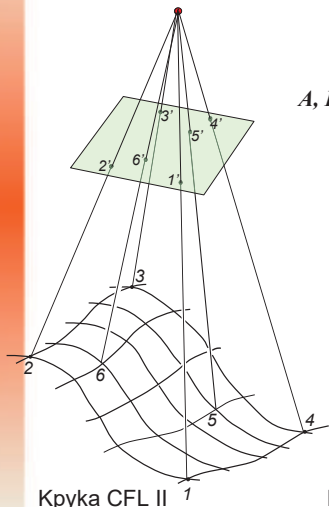
x,y

X,Y

X,Y,Z

x,y w  
dowolnym  
układzie na  
zdjęciu

x,y w układzie  
tłowym (początek  
w pkt. głównym),  
znane c



Kpyka CFL II

Modele geometrii -> RFM

9



równanie kolinearności

przekształcenie rzutowe

$$x = -c \frac{a_{11}(X - X_0) + a_{21}(Y - Y_0) + a_{31}(Z - Z_0)}{a_{13}(X - X_0) + a_{23}(Y - Y_0) + a_{33}(Z - Z_0)}$$

$$x = \frac{AX + BY + CZ + D}{EX + FY + GZ + 1}$$

$$y = -c \frac{a_{12}(X - X_0) + a_{22}(Y - Y_0) + a_{32}(Z - Z_0)}{a_{13}(X - X_0) + a_{23}(Y - Y_0) + a_{33}(Z - Z_0)}$$

$$y = \frac{HX + IY + JZ + K}{EX + FY + GZ + 1}$$

modele te opisują odwzorowanie 3D na 2D

wiązka prostych jest odwzorowana na płaszczyznę punktów (utwory rzutowe wymiaru II)

Kpyka CFL II

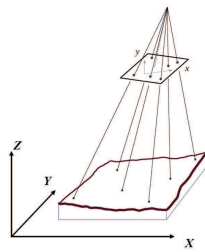
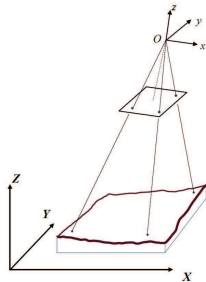
Modele geometrii -> RFM

10

Modele ściśle



CFL I – wykład fotografometryczne wcięcie wstecz



$$x = -c \cdot \frac{r_{11}(X - X_0) + r_{21}(Y - Y_0) + r_{31}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)}$$

$$x = \frac{L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1}$$

$$y = -c \cdot \frac{r_{12}(X - X_0) + r_{22}(Y - Y_0) + r_{32}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)}$$

$$y = \frac{L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1}$$

Kpyka CFL II

Modele geometrii -> RFM

11

Wyznaczenie współczynników DLT



CFL I – wykład fotografometryczne wcięcie wstecz

każdy punkt  $i$  pomierzony na zdjęciu dostarcza pary równań obserwacyjnych:

$$v_{xi} = L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4 - xXL_9 - xYL_{10} - xZL_{11} - x$$

$$v_{yi} = L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8 - yXL_9 - yYL_{10} - yZL_{11} - y$$

liczba obserwacji:  $n = (2 \times \text{liczba ftp})$ , liczba niewiadomych  $u = 11$

do rozwiązania potrzeba min. 6 fotopunktów, „szeroki” rozkład  $(X, Y, Z)$ , nie mogą leżeć na jednej płaszczyźnie

$$\mathbf{v} = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$$

Rozwiązanie MNK

Jeśli  $X, Y, Z$  są liczbami  $\gg$  od  $x, y$  to układ równań jest niestabilny  $\rightarrow$  normalizacja przekształcenie  $X, Y, Z$  aby mieściły się w przedziale  $[-1; 1]$

$$X_n = \frac{X - X_{sr}}{\frac{1}{2}(X_{\max} - X_{\min})} \quad \text{analogicznie dla } Y \text{ i } Z$$

normalizacja do przedziału  $[-1; 1]$  także dla współrzędnych obrazowych  $x, y$

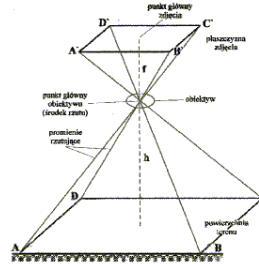
Kpyka CFL II

Modele geometrii -> RFM

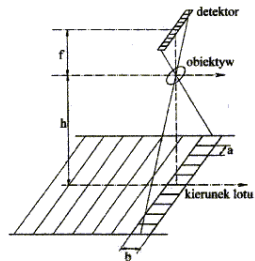
12



rzut środkowy  
Kamera „otworkowa”

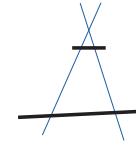


rzut środkowo-równoległy  
skaner linijkowy



rzut środkowy

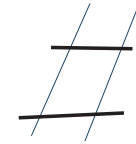
$$x = \frac{AX + BY + CZ + D}{EX + FY + GZ + 1}$$



$$y = \frac{HX + IY + JZ + K}{EX + FY + GZ + 1}$$

rzut równoległy

$$x = AX + BY + CZ + D$$



$$y = HX + IY + JZ + K$$

rzut środkowo-równoległy

$$x = \frac{AX + BY + CZ + D}{EX + FY + GZ + 1}$$



$$y = HX + IY + JZ + K$$

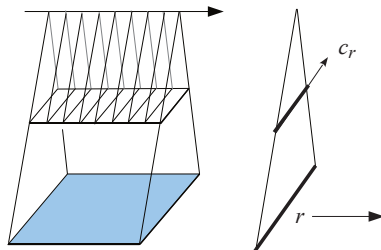
rzut środkowo-równoległy



idealny

$$c_r = \frac{AX + BY + CZ + D}{EX + FY + GZ + 1}$$

$$r = HX + IY + JZ + K$$

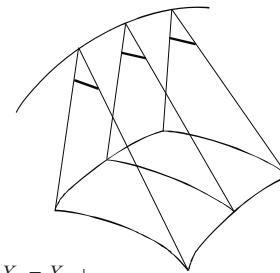


rzut środkowo-równoległy



idealny

zakłócony (rzeczywisty)



$$X_r = X_o + \dots$$

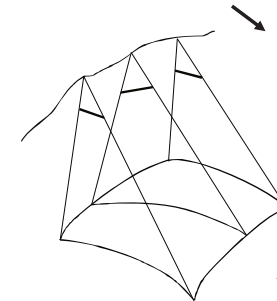
$$Y_r = Y_o + \dots$$

$$H_r = H_o$$

$$ROLL_r = ROLL_o$$

$$PITCH_r = PITCH_o$$

$$HEADER_r = HEADER_o$$



- wolno zmienny  
– sensor w satelicie
- szybko zmienny  
– sensor w samolocie

$$X_r = f_x(t)$$

$$Y_r = f_y(t)$$

$$H_r = f_H(t)$$

$$ROLL_r = f_R(t)$$

$$PITCH_r = f_p(t)$$

$$HEADER_r = f_{HEAD}(t)$$



rzeczywisty

$$X_r = f_X(t)$$

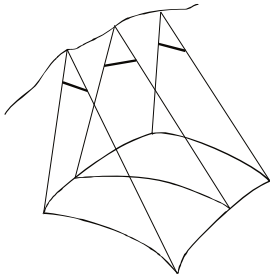
$$Y_r = f_Y(t)$$

$$H_r = f_H(t)$$

$$ROLL_r = f_R(t)$$

$$PITCH_r = f_P(t)$$

$$HEADER_r = f_{HEAD}(t)$$



$$X_r = X_O + X_{shif} + (t - t_O)aX_{drift}$$

$$Y_r = Y_O + Y_{shif} + (t - t_O)bY_{drift}$$

$$Z_r = Z_O + Z_{shif} + (t - t_O)cZ_{drift}$$

$$ROLL_r = R_O + R_{shif} + (t - t_O)dR_{drift}$$

$$PITCH_r = P_O + P_{shif} + (t - t_O)eP_{drift}$$

$$HEADER_r = H_O + H_{shif} + (t - t_O)fH_{drift}$$

Opis zakłóceń funkcją liniową – analogia do modelowania błędów GPS/INS  
 Wada – działa na krótkich odcinkach trajektorii



rzeczywisty

$$X_r = X_O + X_{shif} + (t - t_O)aX_{drift}$$

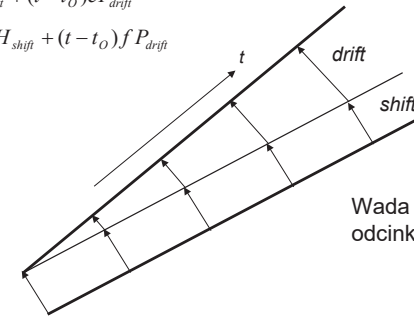
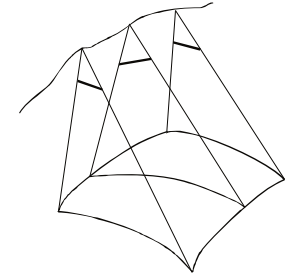
$$Y_r = Y_O + Y_{shif} + (t - t_O)bY_{drift}$$

$$Z_r = Z_O + Z_{shif} + (t - t_O)cZ_{drift}$$

$$ROLL_r = R_O + R_{shif} + (t - t_O)dR_{drift}$$

$$PITCH_r = P_O + P_{shif} + (t - t_O)eP_{drift}$$

$$HEADER_r = H_O + H_{shif} + (t - t_O)fP_{drift}$$

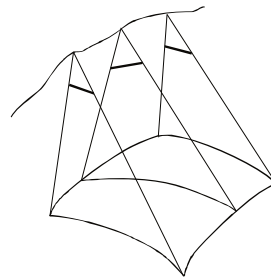
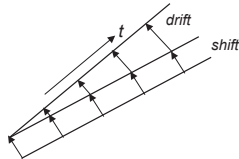


Wada – działa na krótkich odcinkach trajektorii



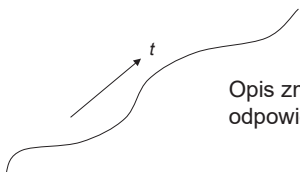
rzeczywisty

$$X_r = X_O + X_{shif} + (t - t_O)aX_{drift}$$



Funkcja liniowa jest zastępowana wielomianem 3. stopnia

$$X_r = A_0 + A_1(X - X_0) + A_2(X - X_0)^2 + A_3(X - X_0)^3 + A_4(Y - Y_0) + \dots$$



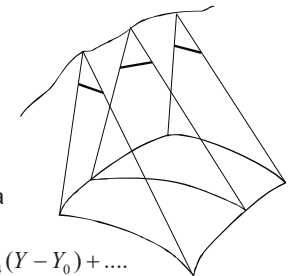
Opis zmienności EOZ za pomocą wielomianów jest odpowiedni dla ruchu satelity (zmiany wolne, płynne)



rzeczywisty

Funkcja liniowa jest zastępowana wielomianem 3. stopnia

$$X_r = A_0 + A_1(X - X_0) + A_2(X - X_0)^2 + A_3(X - X_0)^3 + A_4(Y - Y_0) + \dots$$



$$\sum_{i=1}^{20} W_i(X, Y, Z) = W_1 + W_2X + W_3Y + W_4Z + W_5XY + W_6XZ + W_7YZ + W_8X^2 + W_9Y^2 + W_{10}Z^2 + W_{11}XYZ + W_{12}X^3 + W_{13}XY^2 + W_{14}XZ^2 + W_{15}X^2Y + W_{16}Y^3 + W_{17}YZ^2 + W_{18}X^2Z + W_{19}Y^2Z + W_{20}Z^3$$



idealny

zakłócony (rzeczywisty)

$$c_r = \frac{AX + BY + CZ + D}{EX + FY + GZ + 1}$$

$$r = HX + IY + JZ + K$$

$$c_r = \frac{\sum_{i=1}^{20} W_i^1(X, Y, Z)}{\sum_{i=1}^{20} W_i^2(X, Y, Z)}$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{20} W_i^3(X, Y, Z)}{\sum_{i=1}^{20} W_i^4(X, Y, Z)}$$

$$\sum_{i=1}^{20} W_i(X, Y, Z) = W_1 + W_2X + W_3Y + W_4Z + W_5XY + W_6XZ + W_7YZ + W_8X^2 + W_9Y^2 + W_{10}Z^2 + W_{11}XYZ + W_{12}X^3 + W_{13}XY^2 + W_{14}XZ^2 + W_{15}X^2Y + W_{16}Y^3 + W_{17}YZ^2 + W_{18}X^2Z + W_{19}Y^2Z + W_{20}Z^3$$



RFM Rational Function Model  
RPC Rational Polynomial Coefficients

$$c_r = \frac{\sum_{i=1}^{20} W_i^1(X, Y, Z)}{\sum_{i=1}^{20} W_i^2(X, Y, Z)}$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{20} W_i^3(X, Y, Z)}{\sum_{i=1}^{20} W_i^4(X, Y, Z)}$$

$$c_r = \frac{\sum_{i=1}^{20} W_i^1(E, N, H)}{\sum_{i=1}^{20} W_i^2(E, N, H)}$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{20} W_i^3(E, N, H)}{\sum_{i=1}^{20} W_i^4(E, N, H)}$$

$$c_r = \frac{\sum_{i=1}^{20} W_i^1(\varphi, \lambda, H)}{\sum_{i=1}^{20} W_i^2(\varphi, \lambda, H)}$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{20} W_i^3(\varphi, \lambda, H)}{\sum_{i=1}^{20} W_i^4(\varphi, \lambda, H)}$$

Zapisać w pliku tekstowym *image.rpc* – jeden z wariantów współrzędnych

Geocentryczne

projekcyjne

WGS84



RFM Rational Function Model  
RPC Rational Polynomial Coefficients

$$c_r = \frac{\sum_{i=1}^{20} W_i^1(X, Y, Z)}{\sum_{i=1}^{20} W_i^2(X, Y, Z)}$$

$$c_r = \frac{\sum_{i=1}^{20} W_i^1(E, N, H)}{\sum_{i=1}^{20} W_i^2(E, N, H)}$$

$$c_r = \frac{\sum_{i=1}^{20} W_i^1(\varphi, \lambda, H)}{\sum_{i=1}^{20} W_i^2(\varphi, \lambda, H)}$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{20} W_i^3(X, Y, Z)}{\sum_{i=1}^{20} W_i^4(X, Y, Z)}$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{20} W_i^3(E, N, H)}{\sum_{i=1}^{20} W_i^4(E, N, H)}$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{20} W_i^3(\varphi, \lambda, H)}{\sum_{i=1}^{20} W_i^4(\varphi, \lambda, H)}$$

Dla poprawy stabilności numerycznej przed obliczeniem współczynników  $W_i$  dokonuje się normalizacji wszystkich współrzędnych do przedziału [-1;1]

dotyczy do  $X, Y, Z (E, N, H, \varphi, \lambda)$  oraz  $r, c$

$$\varphi_n = \frac{\varphi - \varphi_{sr}}{\frac{1}{2}(\varphi_{max} - \varphi_{min})}$$

$\varphi = (\text{Latitude} - \text{LAT\_OFF})/\text{LAT\_SCALE}$   
itd. ....



RFM Rational Function Model  
RPC Rational Polynomial Coefficients

$$c_r = \frac{\sum_{i=1}^{20} W_i^1(X, Y, Z)}{\sum_{i=1}^{20} W_i^2(X, Y, Z)}$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{20} W_i^3(X, Y, Z)}{\sum_{i=1}^{20} W_i^4(X, Y, Z)}$$

RFM zawiera 80 współczynników

do ich określenia potrzeba ...

RFM stosuje się dla systemów o małym kącie obrazowania (<3°)

obliczenie RPC na podstawie zbioru GCP jest zwane metodą zależną od terenu

obliczenie RPC bez GCP, na podstawie punktów wirtualnych, jest zwane metodą niezależną od terenu

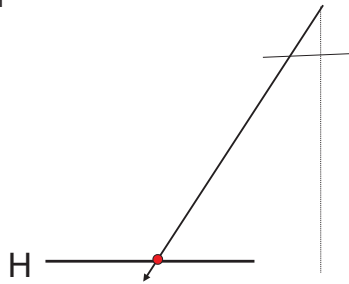


określenie RPC metodą niezależną od terenu

Jeśli znana jest fizyczna geometria sensora (elementy orientacji z pomiaru pokładowego) to rzeczywiste GCP zastępuje się wirtualnymi tzw. **VAP** (Virtual Anchor Point)

**I etap**

Na podstawie elementów orientacji oblicza się wirtualne punkty dopasowania; VAP powstaje przez projekcję w przód: przy znanych elementach orientacji dla linii, oblicza się przecięcie hipotetycznego promienia (równanie kolinearności) z wirtualną płaszczyzną o wysokości H



określenie RPC metodą niezależną od terenu

Jeśli znana jest fizyczna geometria sensora (elementy orientacji z pomiaru pokładowego) to rzeczywiste GCP zastępuje się wirtualnymi tzw. **VAP** (Virtual Anchor Point)

**I etap**

Na podstawie elementów orientacji oblicza się wirtualne punkty dopasowania;

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + \mu \mathbf{R}(\omega, \phi, \kappa) \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ -c \end{bmatrix}$$

Roll, Pitch, Yaw

$$X = X_0 + (Z - Z_0) \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}(-c)}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}(-c)}$$

$$Y = Y_0 + (Z - Z_0) \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}(-c)}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}(-c)}$$

RFM - określenie RPC metodą niezależną od terenu

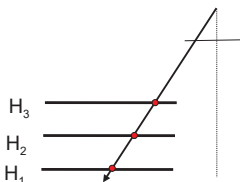


Jeśli znana jest fizyczna geometria sensora (elementy orientacji z pomiaru pokładowego) to rzeczywiste GCP zastępuje się wirtualnymi tzw. **VAP** (Virtual Anchor Point)

**I etap**

Na podstawie elementów orientacji oblicza się zbiór VAPs - stosując równanie kolinearności i przyjmując kilka płaszczyzn przecięcia promieni z wirtualnym terenem ( $H_{min}$  i  $H_{max}$  na podstawie modelu globalnego GTOPO30 DEM)

Oblicza się kilkadziesiąt VAPs ( $X, Y, Z, c_r, r$ ) lub ( $E, N, H, c_r, r$ ) lub ( $\phi, \lambda, H, c_r, r$ )



The Geometrical Comparisons of RSM and RFM for FORMOSAT-2 Satellite Images. Liang-Chien Chen, Tee-Ann Teo, and Chien-Liang Liu

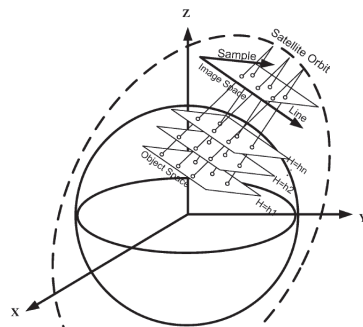


Figure 2. Illustration of VAPs generation.

RFM

określenie RPC metodą niezależną od terenu

**II etap**

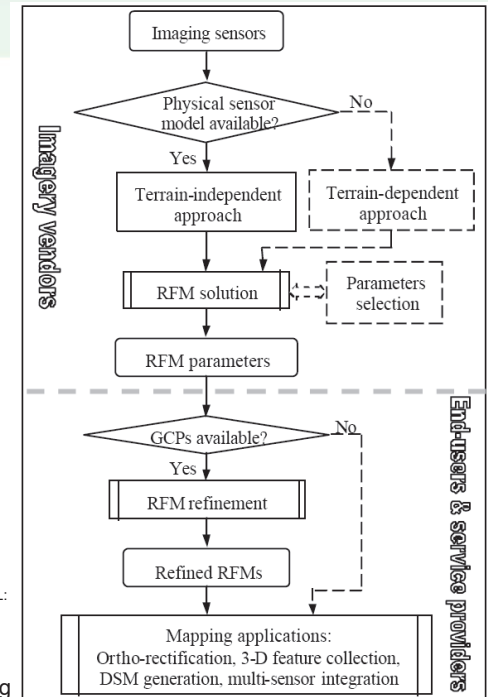
na podstawie VAPs oblicza się RPC

$$c_r = \frac{\sum_{i=1}^{20} W_i^1(X, Y, Z)}{\sum_{i=1}^{20} W_i^2(X, Y, Z)} \quad r = \frac{\sum_{i=1}^{20} W_i^3(X, Y, Z)}{\sum_{i=1}^{20} W_i^4(X, Y, Z)}$$

**III etap**

usunięcie błędów systematycznych

Yong Hu, Vincent Tao, Arie Croitoru  
UNDERSTANDING THE RATIONAL FUNCTION MODEL: METHODS AND APPLICATIONS



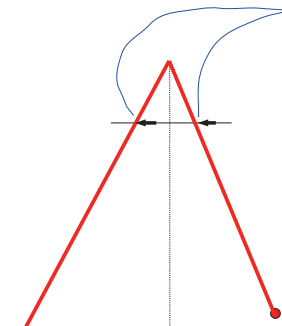


**III etap**  
usunięcie błędów systematycznych

Na podstawie 3-4 GCPs (X,Y,Z/H) oblicza się wsp. transformacji afinicznej korygującej model RFM

Dla każdego GCP są określone wsp. obrazowe:

- c, r (identyfikacja na obrazie)
- $c_{RPC}, r_{RPC}$  (obliczone z RFM)



$$\Delta c = c - c_{RPC} = a_0 + a_1 c_{RPC} + a_2 r_{RPC}$$

$$\Delta r = r - r_{RPC} = b_0 + b_1 c_{RPC} + b_2 r_{RPC}$$

Po obliczeniu modelu zniekształceń systematycznych następuje korekcja:

$$c = c_{RPC} + \Delta c$$

$$r = r_{RPC} + \Delta r$$



Inny podział modeli geometrii

- Math Modelling Method
  - Aerial Photography
  - Satellite Orbital Modelling
  - Polynomial
  - Thin Plate Spline
  - Rational Functions
  - None (mosaic only)

- Równania kolinearności
- Model Toutin-a, oparty na modelowaniu orbity sensora
- Wielomianowy - opis zniekształceń obrazu na podstawie GCP
- Thin Plate Spline – jw ale przy pomocy splajnów
- RFM (iloraz wielomianów)

- Toutin's Model (Low Res): ASAR, ASTER, AVNIR, CBERS, DMC, EOC, ERS, IRS, JERS, LANDSAT, MERIS, PALSAR, RADARSAT, SPOT
- Toutin's Model (High Res): CARTOSAT, EROS, FORMOSAT, IKONOS, KOMPSAT, ORBVIEW, PRISM, QUICKBIRD, SPOT
- ASAR/PALSAR/RADARSAT Specific Model
- Low Resolution: AVHRR