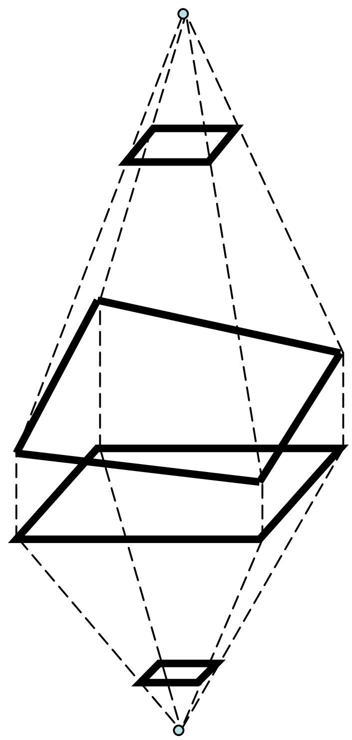
GEOMETRIA RZUTOWA

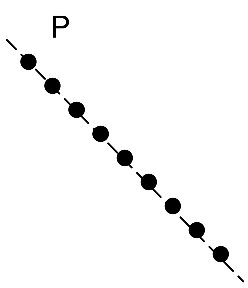


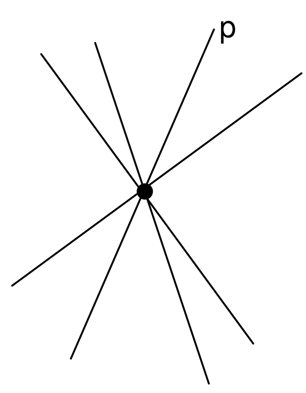
Geometria rzutowa to dział geometrii ogólnej, zajmujący się badaniem opisowych własności utworów geometrycznych w przestrzeni rzutowej.
Przestrzeń rzutowa to zbiór punktów, prostych, płaszczyzn przestrzeni kartezjańskiej powiększona o punkty, proste i płaszczyzny znajdujące się w nieskończoności.

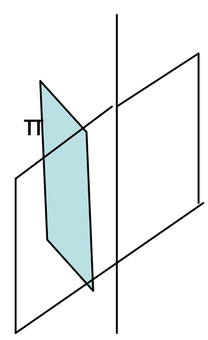
Punkt, prosta i płaszczyzna to <u>elementy zasadnicze</u>.

Przez pojedynczy ruch elementu zasadniczego powstają <u>utwory I wymiaru</u>:

- Prosta punktów,
- Pęk prostych,
- Pęk płaszczyzn

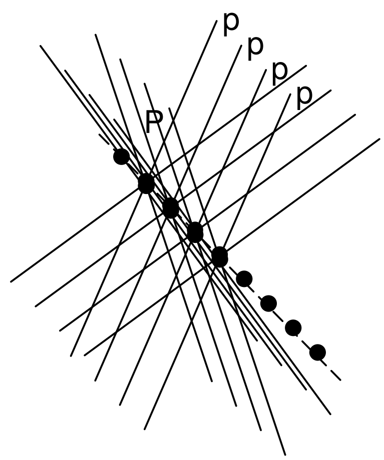






Utwory II-go wymiaru powstają przez pojedynczy ruch utworu I-go wymiaru lub podwójny ruch elementu zasadniczego. Są to:

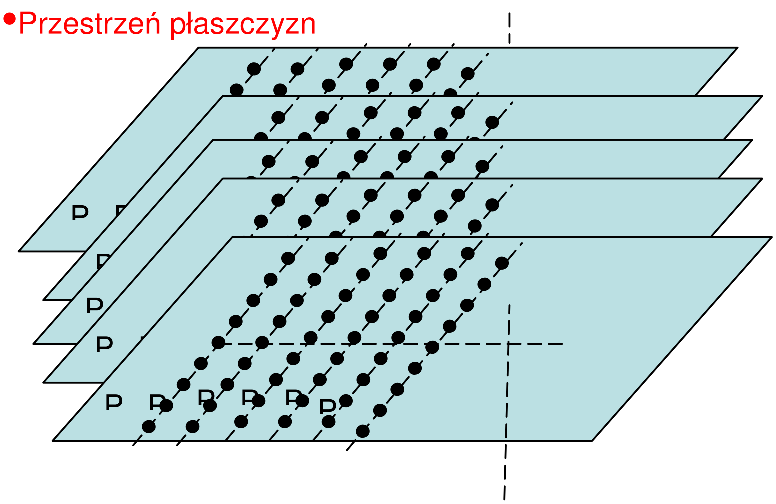
- Płaszczyzna punktów,
- Płaszczyzna prostych,
- Wiązka prostych
- Wiązka płaszczyzn



Płaszczyzna prostych: ruch pęku prostych wzdłuż prostej punktów

Utwory III-go wymiaru powstają przez potrójny ruch elementu zasadniczego lub przez podwójny ruch utworu I-go wymiaru lub ruch utworu II-go wymiaru. Są to:

- Przestrzeń punktów,
- Przestrzeń płaszczyzn



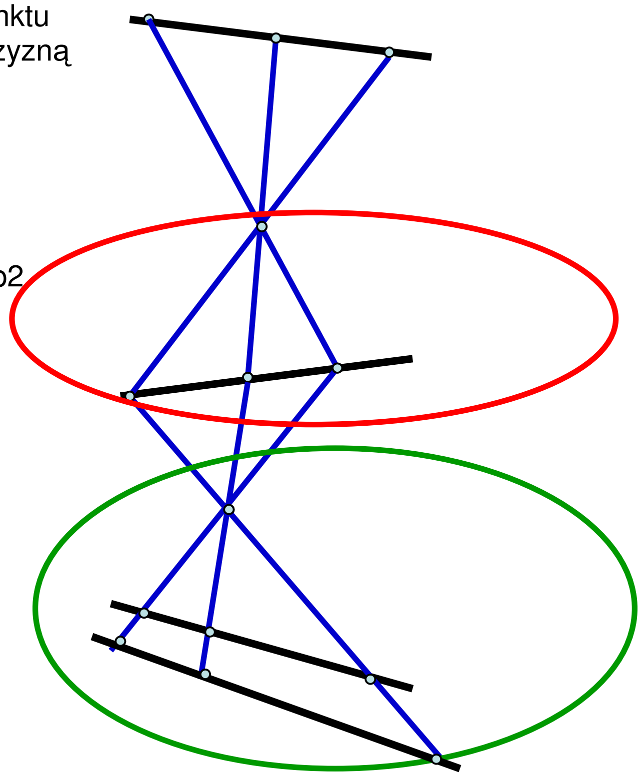
Przestrzeń punktów

Utwory IV-go wymiaru powstają przez……….Należy do nich

- Przestrzeń prostych

Przekształcenia rzutowe:

Rzutowanie: z prostej lub z punktu
Przecinanie: prostą lub płaszczyzną



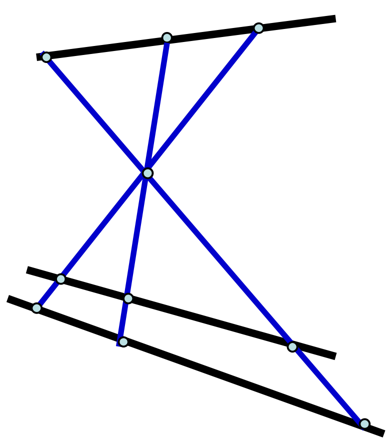
Rzutowanie prostej punktów p2 z punktu W1. Wynik: pęk prostych o wierzchołku W1

Przecinanie pęku prostych o wierzchołku W2 prostą. W wyniku dostajemy prostą punktów p3 (lub p2 lub p4).

Kiedy dwa utwory są perspektywiczne?

Dwa utwory jednoimienne są perspektywiczne, kiedy są wynikiem rzutowania lub przecinania jednego i tego samego utworu podstawowego tego samego wymiaru. Warunkiem jest istnienie elementu zjednoczonego.

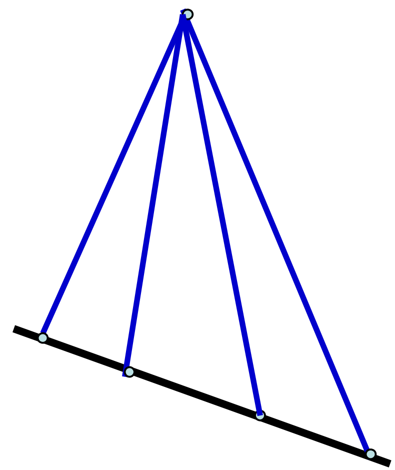
p2, p3, p4 – proste punktów są perspektywiczne. Powstały z przecięcia pęku prostych W2 prostymi



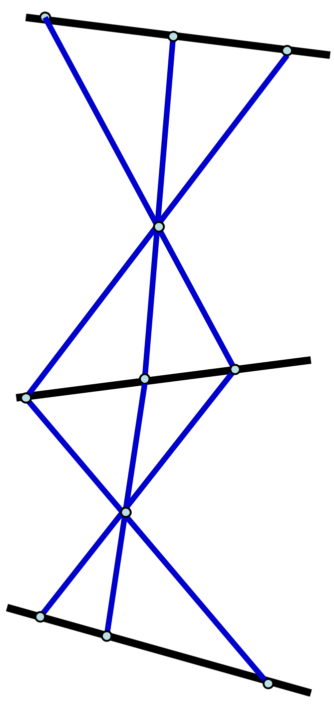
Kiedy dwa utwory są perspektywiczne?

Dwa utwory różnoimienne są perspektywiczne, jeżeli elementy zasadnicze tych utworów przynależą do siebie

Pęk prostych W2 ma z prostą punktów p4 przynależące punkty.



Kiedy dwa utwory są rzutowe?



Kiedy są w łańcuchu przekształceń perspektywicznych.

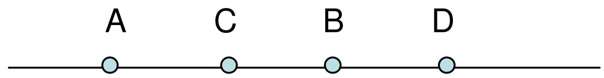
p1 i p2 są perspektywiczne, W1 i W2 są perspektywiczne.

p1 i p3 są rzutowe.

W1 i p3 są rzutowe.

A1, A2,
B1, B2
A2, A3….elementy homologiczne

Własności utworów rzutowych



$$\lambda = (ABCD) = \frac{AC}{BC}\frac{BD}{AD} = \frac{(x_C - x_A)(x_D - x_B)}{(x_C - x_B)(x_D - x_A)}$$

$$(ABCD) = (CDAB)$$

Dwustosunek czwórki punktów jest niezmiennikiem przekształceń rzutowych

Co to są współrzędne rzutowe?

Współrzędnymi rzutowymi punktu nazywamy stosunek liczb y_1:y_2:y_3:……y_n określony przez zależność:

$$[y'] = A[y]$$

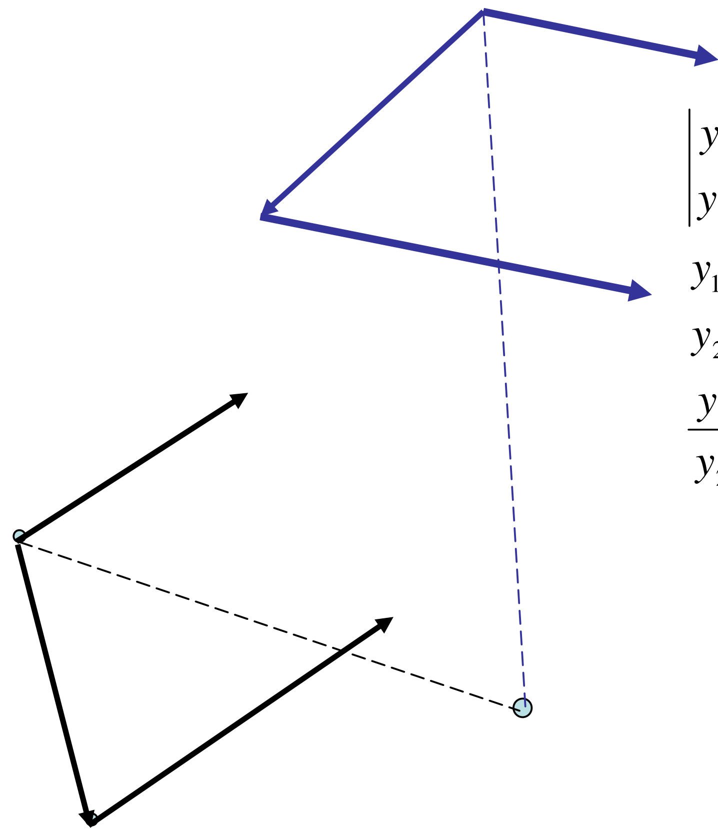
Gdzie A jest macierzą nieosobliwą, a [y] to wektor współrzędnych jednorodnych. Niech w dowolnym układzie ukośnokątnym OXYZ współrzędne punktu rzeczywistego będą x, y, z, a punkt leżący w ∞ jest przedstawiony przez stosunek 1:m:n. Każdemu punktowi przyporządkujmy stosunek czterech nie znikających liczb:

$y_1:y_2:y_3:y_4$ = x:y:z:1 (punkt właściwy)
$y_1:y_2:y_3:y_4$ = 1: m:n:0 (punkt w ∞)

Są to <u>współrzędne jednorodne</u>

Przekształcenie rzutowe jest jednoznaczne ze zmianą układu

Przekształcenie prostej na prostą



$y_2=1$
$y_2'=1$

$$\begin{vmatrix} y_1' \\ y_2' \end{vmatrix} = A \cdot \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix}$$

$$y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2$$

$$y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2$$

$$\frac{y_1'}{y_2'} = \frac{a_{11}y_1 + a_{12}y_2}{a_{21}y_1 + a_{22}y_2}$$

$$\begin{vmatrix} y_1' \\ y_2' \end{vmatrix} = A \cdot \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix}$$

$$y_1' = a_{11} y_1 + a_{12} y_2$$

$$y_2' = a_{21} y_1 + a_{22} y_2$$

$$\frac{y_1'}{y_2'} = \frac{a_{11} y_1 + a_{12} y_2}{a_{21} y_1 + a_{22} y_2}$$

$$x_1' = \frac{a_{11} y_1 + a_{12} y_2}{a_{21} y_1 + a_{22} y_2}$$

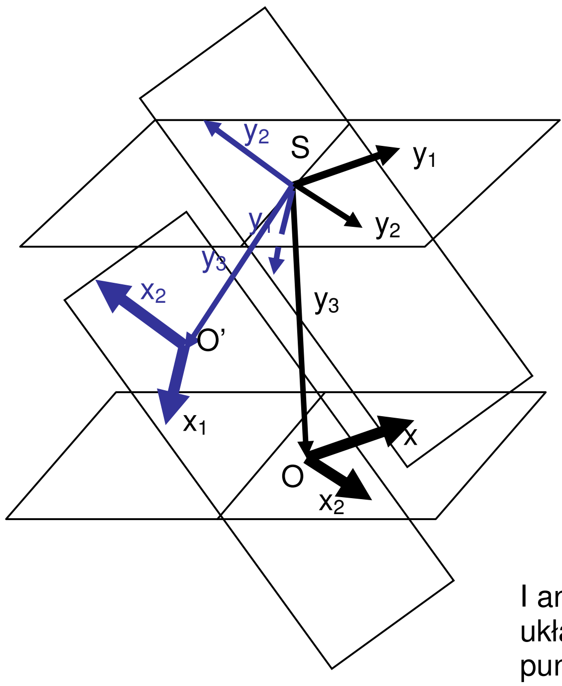
$$y_2 = 1$$

$$x_1' = \frac{a_{11} \frac{y_1}{y_2} + a_{12} \frac{y_2}{y_2}}{a_{21} \frac{y_1}{y_2} + a_{22} \frac{y_2}{y_2}} = \frac{a_{11} x_1 + a_{12}}{a_{21} x_1 + a_{22}} = \frac{\frac{a_{11}}{a_{22}} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{22}}}{\frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 + \frac{a_{22}}{a_{22}}}$$

$$\boxed{x_1' = \frac{A x_1 + B}{C x_1 + 1}}$$

Przekształcenie rzutowe prostej na prostą

Przekształcenie rzutowe płaszczyzny na płaszczyznę



$$\begin{vmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix}$$

$$y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3$$

$$y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3$$

$$y_3' = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3$$

$$\frac{y_1'}{y_3'} = \frac{a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3}{a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3} = x_1'$$

$$\frac{y_2'}{y_3'} = \frac{a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3}{a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3} = x_2'$$

I analogicznie jak poprzednio przechodzimy z układu jednorodnego na układ współrzędnych punktu rzeczywistego:

I analogicznie jak poprzednio przechodzimy z układu jednorodnego na układ współrzędnych punktu rzeczywistego:

$$\frac{y_1'}{y_3'} = \frac{a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3}{a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3} = x_1'$$

$$\frac{y_2'}{y_3'} = \frac{a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3}{a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3} = x_2'$$

$$y_3 = 1$$

$$x_1' = \frac{a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}}{a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}}$$

$$x_2' = \frac{a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}}{a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}}$$

Przekształcenie płaszczyzny na płaszczyznę

$$x_1' = \frac{Ax_1 + Bx_2 + C}{Dx_1 + Ex_2 + 1}$$

$$x_2' = \frac{Fx_1 + Gx_2 + H}{Dx_1 + Ex_2 + 1}$$

Przekształcenie przestrzeni na przestrzeń:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1' &= \frac{Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D}{Ex_1 + Fx_2 + Gx_3 + 1} \\ x_2' &= \frac{Hx_1 + Ix_2 + Jx_3 + K}{Ex_1 + Fx_2 + Gx_3 + 1} \\ x_3' &= \frac{Lx_1 + Łx_2 + Mx_3 + N}{Ex_1 + Fx_2 + Gx_3 + 1} \end{aligned}}$$

Jeśli przyjmiemy jako utwory wymiaru III-go: przestrzeń punktów i jedną z płaszczyzn przestrzeni:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1' &= \frac{Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D}{Ex_1 + Fx_2 + Gx_3 + 1} \\ x_2' &= \frac{Hx_1 + Ix_2 + Jx_3 + K}{Ex_1 + Fx_2 + Gx_3 + 1} \end{aligned}}$$

Zwane równaniami DLT (Direct Linear Transformation

Do tej samej postaci wzoru DLT można dojść drogą przekształceń równania kolinearności

$$x = -c_k \frac{a_{11}X + a_{21}Y + a_{31}Z + (-a_{11}X_0 - a_{21}Y_0 - a_{31}Z_0)}{a_{13}X + a_{23}Y + a_{33}Z + (-a_{13}X_0 - a_{23}Y_0 - a_{33}Z_0)} /(-a_{13}X_0 - a_{23}Y_0 - a_{33}Z_0)$$

$$y = -c_k \frac{a_{12}X + a_{22}Y + a_{32}Z + (-a_{12}X_0 - a_{22}Y_0 - a_{32}Z_0)}{a_{13}X + a_{23}Y + a_{33}Z + (-a_{13}X_0 - a_{23}Y_0 - a_{33}Z_0)} /(-a_{13}X_0 - a_{23}Y_0 - a_{33}Z_0)$$

$$x = -c_k \frac{\frac{a_{11}X}{(-a_{13}X_0 - a_{23}Y_0 - a_{33}Z_0)} + \frac{a_{21}Y}{(-a_{13}X_0 - a_{23}Y_0 - a_{33}Z_0)} + \frac{a_{31}Z}{(-a_{13}X_0 - a_{23}Y_0 - a_{33}Z_0)} + \frac{(-a_{11}X_0 - a_{21}Y_0 - a_{31}Z_0)}{(-a_{13}X_0 - a_{23}Y_0 - a_{33}Z_0)}}{\frac{a_{13}X}{(-a_{13}X_0 - a_{23}Y_0 - a_{33}Z_0)} + \frac{a_{23}Y}{(-a_{13}X_0 - a_{23}Y_0 - a_{33}Z_0)} + \frac{a_{33}Z}{(-a_{13}X_0 - a_{23}Y_0 - a_{33}Z_0)} + 1}$$

$$y = -c_k \frac{\frac{a_{12}X}{(-a_{13}X_0 - a_{23}Y_0 - a_{33}Z_0)} + \frac{a_{22}Y}{(-a_{13}X_0 - a_{23}Y_0 - a_{33}Z_0)} + \frac{a_{32}Z}{(-a_{13}X_0 - a_{23}Y_0 - a_{33}Z_0)} + \frac{(-a_{12}X_0 - a_{22}Y_0 - a_{32}Z_0)}{(-a_{13}X_0 - a_{23}Y_0 - a_{33}Z_0)}}{\frac{a_{13}X}{(-a_{13}X_0 - a_{23}Y_0 - a_{33}Z_0)} + \frac{a_{23}Y}{(-a_{13}X_0 - a_{23}Y_0 - a_{33}Z_0)} + \frac{a_{33}Z}{(-a_{13}X_0 - a_{23}Y_0 - a_{33}Z_0)} + 1}$$

Przekształcenie DLT – 6 par punktów